Le but de ce cours est de présenter quelques modèles utilisés pour décrire l'évolution des courants marins à grande échelle, ainsi que quelques outils pour leur analyse mathématique.

I) Le système de Navier-Stokes-Fourier

- Variables décrivant l'état du système :
  - Vitesse du fluide u
  - Densité ρ
  - Température θ
  - Pression $\underline{P}$
  - Salinité (concentration en sel) S.

- Forces extérieures :
  - Forçage par le vent / couplage avec l'atmosphère
  - Interaction gravitationnelle avec la Lune et le Soleil
  - Force de Coriolis (rotation de la Terre)

Système complet :

- Conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho u) = 0$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\partial_t(\rho u) + \nabla\cdot(\rho u \otimes u) + 2\rho\Omega\, k \wedge u + \nabla \underline{P} = -\rho g\, e_3 + \mathcal{D}$$

Ω = vitesse de rotation angulaire de la Terre $(2\pi/(24\times 3600)\ \mathrm{rad.s^{-1}})$

k = vecteur unitaire Nord-Sud

Traditional approximation $k = e_3$

Lucas, Mc Williams, Rousseau

g = accélération de la pesanteur ($9{,}81\, m \cdot s^{-2}$)
e_z = verticale locale
$\mathcal{D}$ = forces de dissipation visqueuses.

- Conservation de l'énergie :

$$\rho C_p \partial_t \Theta + \rho C_p u \cdot \nabla \Theta + \underline{P} \cdot \nabla u = K_T \Delta \Theta + 2\tau : Du$$

C_p : capacité thermique (supposée constante)
τ : tenseur des contraintes visqueuses
Du : gradient symétrique de u

- Transport - diffusion de la salinité :

$$\rho \partial_t S + \rho u \cdot \nabla S = K_S \Delta S$$

- Équation d'état :

$$\underline{P} = p(\rho, \Theta, S) \qquad \left(\text{Gill} : \rho(S, \Theta, \underline{P}) = \frac{\rho(S, \Theta, 0)}{1 - \frac{\underline{P}}{K(S, \Theta, \underline{P})}} \right)$$

+ Conditions aux bords.
En général :

- Bords rigides $\begin{cases} \bullet \text{ non-glissement pour } u \\ \bullet \text{ Conditions de Neumann pour } T \text{ et } S \end{cases}$

- Surface libre ???
  ↳ Remplacée par une condition de Toit rigide
  (ex : $u_3|_{z=0} = 0$, $\partial_z u_h|_{z=0} = \sigma$ (forçage par le vent))
  + conditions de Neumann pour S et Θ.

Questions :

1) Existence / unicité des solutions ?

→ Pas évident du tout si on prend en compte des lois de pression et un tenseur de contraintes visqueuses physiquement réalistes ...

Mais OK pour des modèles "proches" de celui évoqué plus haut.

2) Analyse qualitative / quantitative :

Après adimensionnement des équations, présence de nombreux paramètres sans dimension, mesurant l'intensité de la rotation, de la stratification ... La petitesse de ceux-ci donne génériquement naissance à de petites échelles en espace et en temps (oscillations, couches limites ...) Par conséquent, l'analyse numérique peut se révéler très coûteuse ou peu fiable (besoin de maillages très fins). Une analyse théorique est donc utile et nécessaire pour :

- identifier de bons modèles approchés
- justifier l'approximation
- comprendre le comportement des solutions, en vue de proposer des schémas numériques pertinents.

Buts du cours : • Exposer la hiérarchie des modèles
• Présenter deux outils importants dans l'analyse asymptotique : méthodes de filtrage et couches limites.

⊗ Adimensionnement des équations et petits paramètres :

On choisit :

- Échelle de longueur horizontale $L \simeq 10^3 \text{km}$
- ———————— verticale $D \simeq 5 \text{ km}$
- Vitesse horizontale typique : $U \simeq 5 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$
- Température typique $\Theta = 10°C$
- Salinité typique $S^* = 35$

Petits paramètres :

- Nombre de Rossby : mesure (l'inverse de) l'intensité de la rotation : $Ro = \dfrac{U}{\Omega L} \simeq 7.10^{-4}$

- Nombre de Froude :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}} \simeq 2 \cdot 10^{-4}$$

- Rapport d'aspect $\delta = \dfrac{D}{L} \simeq 5 \cdot 10^{-3}$

- Nombre de Mach $Ma = U/U^*$; U^* = local speed of sound

⇝ Équations adimensionnées :

$$
\begin{cases}
\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho u) = 0 \\
\partial_t(\rho u) + \nabla\cdot(\rho u \otimes u) + 2\dfrac{\rho}{Ro}\, k\wedge u + \dfrac{1}{Ma}\begin{pmatrix} \nabla_h p \\ \frac{1}{\delta^2}\partial_z p \end{pmatrix} = -\dfrac{\rho}{\delta^2 Fr^2}\, e_3 + \tilde{\mathcal{D}} \\
\rho\partial_t \theta + \rho u\cdot\nabla\theta + \underline{P}\,\nabla\cdot u = K_T\left(\Delta_h\theta + \delta^{-2}\partial_z^2\theta\right) + Fr^2\tilde{Q}(u,u) \\
\rho\partial_t S + \rho u\cdot\nabla S = K_S\left(\Delta_h S + \delta^{-2}\partial_z^2 S\right)
\end{cases}
\qquad (NSF)
$$

+ éq d'état adimensionnée.

$Ma, Ro, Fr, \delta \ll 1$ ⇝ problème de pénalisation singulière.

⊗ Difficultés liées à l'étude de (NSF) :

- <u>Modélisation</u> : plusieurs petits paramètres... Faut-il les prendre égaux ? indépendants ? Considérer que $Fr^2 \ll Ro$ (par exemple), et donc faire d'abord $Fr^2 \to 0$, puis $Ro \to 0$? Quid du rapport d'aspect ? du nombre de Mach ? Quelle équation d'état prendre ? etc.

⇝ Toujours un choix fait lors de cette étape. Pas vraiment de réponse universelle.

Pour un phénomène donné, que l'on cherche à modéliser, on va choisir un régime de paramètres qui semble pertinent, et passer à la limite, en espérant capturer le bon comportement (i.e. celui observé expérimentalement, et que l'on souhaitait modéliser).

- <u>Analyse théorique</u>: pénalisations singulières antisymétriques; anisotropie du tenseur de diffusion; loi de pression atypique.

Toy model:

$$\begin{cases} \dot{u}_\varepsilon + \frac{i}{\varepsilon} u_\varepsilon + u_\varepsilon^2 = 0 \\ u_\varepsilon(t=0) = 1 \end{cases}$$

Variation de la constante (= filtrage des oscillations):

$$v_\varepsilon(t) := \exp\left(+\frac{it}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon$$

$$\left(\text{ou: } u_\varepsilon(t) = \exp\left(\frac{-it}{\varepsilon}\right) v_\varepsilon\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \dot{v}_\varepsilon + \exp\left(-\frac{it}{\varepsilon}\right) v_\varepsilon^2 = 0 \\ v_\varepsilon(0) = 1 \end{cases}$$

Solution explicite: $\quad v_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{1 + i\varepsilon(e^{-it/\varepsilon} - 1)} \simeq 1$

$$\frac{d}{dt}\left(+\frac{1}{v_\varepsilon}\right) = e^{-it/\varepsilon}$$

$$\frac{1}{v_\varepsilon(t)} - 1 = i\varepsilon\left(e^{-it/\varepsilon} - 1\right)$$

$\rightsquigarrow u_\varepsilon(t) \simeq \exp\left(-\frac{it}{\varepsilon}\right)$: <u>fortes oscillations</u>.

L'interaction entre les termes de pénalisations singulières et la non linéarité crée des phénomènes de résonance ⇝ cf Cours n° 2.

II) Limites formelles et hiérarchie des modèles.

1) Le système des fluides tournants :

Cas particulier de (NSF) :

$\rho \equiv 1,\ \theta \equiv 1,\ S \equiv 1$

$$(NSC)\ \begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla u) + \begin{pmatrix} \nabla_h P \\ \frac{1}{\delta^2}\partial_z P \end{pmatrix} + \frac{2}{Ro} k \wedge u = \mathcal{D} \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

Simplifications : $k = e_3$ (projection sur la verticale locale) ; $\delta = 1$ (cf plus tard)

+approx f-plan

+ Hypothèse supplémentaire de modélisation :

$$\mathcal{D} = \nu_h \Delta_h u + \nu_z \partial_z^2 u$$

$\mathbb{P}$ = projecteur de Leray

(= p.o. L^2 sur les fonctions à divergence nulle).

$L = \mathbb{P}(2k \wedge \cdot)$

$Q(u,u) = \mathbb{P}((u\cdot\nabla)u)$

Réécriture de (NSC)

$$\partial_t u + \frac{1}{Ro} Lu + Q(u,u) - \nu_h \Delta_h u - \nu_z \partial_z^2 u = 0$$

L : opérateur antisymétrique : opérateur de Coriolis

Par analogie avec le toy-model précédent, on s'attend à ce que u possède des oscillations rapides, à des fréquences $\sim Ro^{-1}$.

Limite faible (moyenne en temps) : vérifie

$$\begin{cases} \nabla_h \bar{P} + \bar{u}_h^\perp = 0 \\ \partial_z \bar{P} = 0 \end{cases}$$ (projection sur le noyau de L)

$\rightsquigarrow$ $\bar{u} = (\nabla_h^\perp \bar{P}, 0)$: le flot moyen limite est bi-dimensionnel. Déplacement en colonnes d'eau : théorème de Taylor-Proudman.

Pour cette raison, on "oublie" souvent la petitesse de δ, qui ne ferait qu'accentuer le comportement bi-dimensionnel.

Comportement limite :

- En l'absence de bords : $\sim$ Navier-Stokes 2D
- En présence de bords : dissipation d'énergie supplémentaire dans une CL à cause de la friction sur le bord

$\rightsquigarrow$ NS 2D avec terme de pompage (cf cours 3).

2) Hiérarchie de modèles

a) (NSF) $\longrightarrow$ Boussinesq en rotation / éq primitives

Ref: Feireisl - Novotny
$\Omega = \mathbb{T}^3$

Système de départ:

$$(NSF_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \underline{P}^\varepsilon = \operatorname{div} \tau^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon e_3 \\ \partial_t(\rho^\varepsilon s^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon s^\varepsilon u^\varepsilon) - \operatorname{div}\left(K \frac{\nabla \theta^\varepsilon}{\theta^\varepsilon}\right) = \sigma^\varepsilon \end{cases}$$

avec: $\underline{P}^\varepsilon := \frac{\varepsilon}{4} (\theta^\varepsilon)^4 + (\theta^\varepsilon)^{5/2} \underline{P}\left(\frac{\rho_\varepsilon}{(\theta^\varepsilon)^{3/2}}\right)$

$$\tau^\varepsilon := 2\mu(\theta^\varepsilon) D(u^\varepsilon) - \frac{2}{3} \operatorname{div} u^\varepsilon \, Id + \zeta(\theta^\varepsilon) \operatorname{div}(u^\varepsilon) \, Id$$

$$s^\varepsilon = \frac{4\varepsilon}{3} \frac{\theta_\varepsilon^3}{\rho_\varepsilon} + S\left(\frac{\rho_\varepsilon}{(\theta^\varepsilon)^{3/2}}\right)$$

$$\sigma^\varepsilon = \frac{1}{\theta_\varepsilon}\left(\varepsilon^2 \tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon + K \frac{|\nabla \theta^\varepsilon|^2}{\theta^\varepsilon}\right)$$

Ansatz: $\rho^\varepsilon = 1 + \varepsilon \rho_1^\varepsilon$, $\theta^\varepsilon = 1 + \varepsilon \theta_1^\varepsilon$

Formally: $(\rho_1^\varepsilon, \theta_1^\varepsilon, u^\varepsilon) \longrightarrow (\rho_1, \theta_1, u)$

Asymptotic expansion for $\underline{P}^\varepsilon, \tau^\varepsilon, \sigma^\varepsilon, s^\varepsilon$:

$$\underline{P}^\varepsilon = \underline{P}(1) + \varepsilon\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\theta_1 \underline{P}(1) + \underline{P}'(1)\left(\rho_1 - \frac{3}{2}\theta_1\right)\right) + \varepsilon^2 \underline{P}_2 + \cdots$$

$$s^\varepsilon = S(1) + \varepsilon\left(\frac{4}{3} + S'(1)\left(\rho_1 - \frac{3}{2}\theta_1\right)\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$\sigma^\varepsilon = O(\varepsilon^2)$$

$$\tau^\varepsilon = 2\mu(1)\, D(u) - \frac{2}{3}\operatorname{div} u\, Id + \zeta(1)\operatorname{div} u\, Id + O(\varepsilon)$$

Plug Ansatz into (NSF_ε):

$(NSF_\varepsilon . a)$: $\boxed{\operatorname{div} u = 0}$ (OBa)

$(NSF_\varepsilon . b)$:

Order ε^{-1}: $\frac{5}{2}\underline{P}(1)\nabla\theta_1 + \underline{P}'(1)\nabla\left(\rho_1 - \frac{3}{2}\theta_1\right) = -e_3$

Order ε^0:

$$\boxed{\partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla \underline{P}_2 - \mu\Delta u = -\rho_1 e_3} \quad \text{(OBb)}$$

$(NSF_\varepsilon . c)$ Order ε:

$$S'(1)\left(\partial_t\left(\rho_1 - \frac{3}{2}\theta_1\right) + u\cdot\nabla\left(\rho_1 - \frac{3}{2}\theta_1\right)\right) - \kappa\Delta\theta_1 = 0$$

On pose $\Psi = \rho_1 - \frac{3}{2}\theta_1$

Alors $\frac{5}{2}\underline{P}(1)\,\theta_1 + \underline{P}'(1)\,\Psi = -z$

$\rightsquigarrow$ La dernière équation devient

$$\partial_t \Psi + u\cdot\nabla\Psi - \kappa\Delta\Psi = 0$$

et $\left(\underline{P}'(1) - \frac{5}{3}\underline{P}(1)\right) \Theta + \frac{5}{3}\underline{P}(1)\rho_1 = -z$

⤳ Finalement, on obtient

$$\boxed{\partial_t \rho_1 + u\cdot\nabla\rho_1 - \alpha u_3 - K\Delta\rho_1 = 0} \quad (OBc)$$

pour un certain $\alpha > 0$ (Brunt-Väisälä frequency)

(OB) : système d'Oberbeck-Boussinesq.

Variantes : terme de rotation ...

• éq primitives : la dernière éq. de (OBb) devient seulement $\partial_z \underline{P} = -\rho$.

b) Oberbeck-Boussinesq with rotation ⤳ QG

Starting point: Ref : Lions, Temam, Wang, Beale & Bourgeois, Chemin, Iftimie, Gallagher, Charve

$$\begin{cases} \partial_t u_\eta + u_\eta\cdot\nabla u_\eta + \frac{1}{\eta} e_3 \wedge u_\eta + \nabla \underline{P}_\eta - \Delta u_\eta = -\frac{1}{F\eta} T_\eta e_3 \\ \qquad \operatorname{div} u_\eta = 0 \\ \partial_t T_\eta + u_\eta\cdot\nabla T_\eta - \frac{1}{F\eta} u_3 - K\Delta T_\eta = 0 \end{cases}$$

$F > 0$

Compact form: $U_\eta = \begin{pmatrix} u_\eta \\ T_\eta \end{pmatrix}$

$$\partial_t U_\eta + \frac{1}{\eta} L U_\eta + Q(U_\eta, U_\eta) - \mathcal{D}_\eta = 0$$

L : anti-symmetric penalization

$$L = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{P} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{-1} \\ 0 & 0 & -F^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

? Limit as $\eta \to 0$? $\mathbb{P}$ = Leray projector.

Ansatz: $U_\eta \to U_0$

Then $U_0 \in \ker L$:

$$\begin{cases} e_3 \wedge u_0 + \nabla P_0 = -F^{-1} T_0 e_3 \\ u_{0,3} = 0 \\ \operatorname{div} u_0 = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{div}_h u_{0,h} = 0$: $u_{0,h} = \nabla_h^\perp P_0$

$\partial_z P_0 = -F^{-1} T_0$

Introduce the potential vorticity

$$\omega_0 = \partial_1 u_{0,2} - \partial_2 u_{0,1} - F \partial_z T_0$$

$$= \Delta_h P_0 + F^2 \partial_z^2 P_0 := \Delta_F P_0 .$$

Then $\begin{cases} u_{0,h} = \nabla_h^\perp \Delta_F^{-1} \omega_0 \\ u_{0,3} = 0 \\ T_0 = -F \partial_z \Delta_F^{-1} \omega_0 \end{cases}$: $U_0 = \begin{pmatrix} \nabla_h^\perp \\ 0 \\ -F\partial_z \end{pmatrix} \Delta_F^{-1} \omega_0$

? Equation for ω_0?

$\to$ Push the expansion further: $U_\eta = U_0 + \eta U_1 + \cdots$

$$\partial_t U_0 + L U_1 + Q(U_0, U_0) - \mathcal{D} U_0 = 0$$

Project onto kernel of L

$\simeq$ take $-\nabla_h^\perp$ of first eq, $-F\partial_z$ of last eq.

$$\begin{cases} \partial_t u_{0,h} + u_{0,h}\cdot\nabla_h u_{0,h} + \nabla_h P_1 + u_{1,h}^\perp - \Delta u_{0,h} = 0 \\ \qquad \partial_z P_1 = -F^{-1} T_1 \\ \partial_t T_0 + u_{0,h}\cdot\nabla_h T_0 - F^{-1} u_{1,3} - \kappa \Delta T_0 = 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \partial_t \omega_0 + u_{0,h}\cdot\nabla_h \omega_0 - (F\partial_z u_{0,h})\cdot\nabla_h T_0$$
$$- \Delta\left(\Delta_h + \kappa F^2 \partial_z^2\right)\Delta_F^{-1}\omega_0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_z u_{0,h} &= \partial_z \nabla_h^\perp \Delta_F^{-1}\omega_0 \\ \nabla_h T_0 &= -F\nabla_h \partial_z \Delta_F^{-1}\omega_0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \partial_z u_{0,h}\cdot\nabla_h T_0 = 0$$

$$(QG)\begin{cases} \partial_t \omega_0 + u_{0,h}\cdot\nabla_h \omega_0 - \Gamma\omega_0 = 0 \\ \text{with } \Gamma = \Delta\left(\Delta_h + \kappa F^2\partial_z^2\right)\Delta_F^{-1} \\ \qquad u_{0,h} = \nabla_h^\perp \Delta_F^{-1}\omega_0 \end{cases}$$